www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 6

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

NOTATIONS ET OBJECTIFS

On note $\mathscr{C}(]0, +\infty[)$ le $\mathbb{C}$-espace des fonctions continues sur $]0, +\infty[$ à valeurs complexes et E le sous-espace vectoriel constitué des fonctions f telles que, pour tout nombre réel $s > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s}\,du$ soit convergente. Pour tout élément f de E, on note $\hat{f}$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$(1) \qquad \hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s}\,du.$$

Dans la partie I on étudie la continuité et le comportement asymptotique de $\hat{f}$.

Dans la partie II on établit que, pour tout nombre réel $a > 0$, la fonction $h \mapsto \hat{f}(a+h)$ est développable en série entière sur $]-a, a[$.

Enfin, dans la partie IV, on exprime $\hat{f}$ à l'aide de la transformation de Laplace, définie et étudiée dans la partie III.

Étant donné un élément f de E, pour tout élément s de $]0, +\infty[$ et tout élément t de $[0, +\infty[$, on pose :

$$(2) \qquad \varphi_s(t) = \int_0^t \frac{f(u)}{u+s}\,du \quad \text{et} \quad \psi_s(t) = \int_t^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s}\,du.$$

Dans ces conditions, $\hat{f}(s) = \varphi_s(t) + \psi_s(t)$.

Pour toute fonction χ continue bornée sur $[0, +\infty[$ à valeurs complexes, on pose : $N_\infty(\chi) = \sup_{u \geqslant 0} |\chi(u)|$.

I. ÉTUDE DE LA FONCTION $\hat{f}$

1. *Définition de $\hat{f}$.*

Soit f une fonction continue sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe un nombre réel $a > 0$ tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u+a}\,du$ converge ; on définit alors φ_a et ψ_a par les relations (2).

a. Prouver que φ_a est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$; déterminer la dérivée de φ_a. Établir que φ_a admet une limite en $+\infty$. Prouver enfin que φ_a est bornée sur $[0, +\infty[$.

b. En déduire des propriétés analogues pour ψ_a.

c. Établir que, pour tout $s > 0$, et pour tout $t \geqslant 0$, l'intégrale $\int_t^{+\infty} \frac{\psi_a(u)}{(u+s)^2}\,du$ est absolument convergente et que :

$$\left| \int_t^{+\infty} \frac{\psi_a(u)}{(u+s)^2}\,du \right| \leqslant \frac{1}{t+s} N_\infty(\psi_a).$$

d. Montrer, grâce à une intégration par partie que l'on justifiera, que pour tout $s > 0$ et pour tout $t \geqslant 0$, l'intégrale $\psi_s(t) = \int_t^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s}\,du$ est convergente et que :

$$\psi_s(t) = \frac{t+a}{t+s}\psi_a(t) + (s-a)\int_t^{+\infty} \frac{\psi_a(u)}{(u+s)^2}\,du.$$

En déduire que, pour tout $s \geqslant a$, $\qquad (3) \qquad N_\infty(\psi_s) \leqslant N_\infty(\psi_a)$.

Tournez la page S.V.P.

e. En déduire aussi que f appartient à E et que, pour tout $s > 0$,

$$(4) \qquad \hat{f}(s) = \frac{a}{s}\hat{f}(a) + (s - a)\int_0^{+\infty} \frac{\psi_a(u)}{(u + s)^2}\,du.$$

Prouver enfin que, pour tout $s > 0$,

$$|\hat{f}(s)| \leqslant N_\infty(\psi_a) \quad \text{si } s \geqslant a \qquad \text{et} \qquad |\hat{f}(s)| \leqslant \frac{2a - s}{s} N_\infty(\psi_a) \quad \text{si } s \leqslant a.$$

2. *Exemples.*

a. Pour tout nombre réel α on note f_α la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f_\alpha(u) = u^{\alpha - 1}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f_α appartient à E, et prouver alors que $\hat{f}_\alpha$ est proportionnelle à f_α. On posera $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u + 1}\,du$.

b. Pour tout nombre complexe β, on note e_β la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $e_\beta(u) = e^{-\beta u}$. Prouver, à l'aide d'une intégration par parties, que si $\mathrm{Re}\,\beta \geqslant 0$ et $\beta \neq 0$, e_β appartient à E et que, pour tout $s > 0$, $|\hat{e}_\beta(s)| \leqslant \frac{2}{|\beta| s}$. Pour quelles valeurs de β l'intégrale définissant $\hat{e}_\beta$ est-elle absolument convergente ?

3. *Continuité de* $\hat{f}$.

Soit f un élément de E.

a. Soient x et y des éléments de $]0, +\infty[$ tels que $x \leqslant y$. En utilisant (4), établir que :

$$\hat{f}(y) - \hat{f}(x) = (y - x)\left[-\frac{\hat{f}(x)}{y} + \int_0^{+\infty} \frac{\psi_x(u)}{(u + y)^2}\,du\right].$$

b. En déduire que, pour tout $a > 0$, $\hat{f}$ est lipschitzienne sur $[a, +\infty[$ dans le rapport $2\,\frac{N_\infty(\psi_a)}{a}$.

c. Établir la continuité de $\hat{f}$ sur $]0, +\infty[$.

4. *Comportement asymptotique de* $\hat{f}$ *en* $+\infty$.

Soit f un élément de E.

a. Prouver que, pour tout $s \geqslant 1$ et pour tout élément b de $]0, +\infty[$,

$$|\hat{f}(s)| \leqslant \frac{b + 1}{b + s} N_\infty(\psi_1) + \sup_{u \geqslant b} |\psi_1(u)|;$$

(on pourra utiliser (4) en prenant $a = 1$ et découper l'intervalle d'intégration $]0, +\infty[$ en $]0, b]$ et $[b, +\infty[$).

b. Prouver que $\hat{f}(s)$ tend vers 0 lorsque s tend vers $+\infty$.

Tournez la page S.V.P.

II. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE DE $h \longmapsto \hat{f}(a+h)$.

On suppose donnés un élément f de E et un nombre réel $a > 0$. Pour tout entier $p \geqslant 0$, on pose :

$$\alpha_p = \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{(u+a)^{p+1}}\,du ; \text{ en particulier } \alpha_0 = \hat{f}(a).$$

1. *Étude des intégrales α_p.*

a. Prouver que, pour tout entier $p \geqslant 1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi_a(u)}{(u+a)^{p+1}}\,du$ est absolument convergente.

À l'aide d'une intégration par parties, en déduire que l'intégrale α_p est convergente et que :

$$\alpha_p = p\int_0^{+\infty} \frac{\varphi_a(u)}{(u+a)^{p+1}}\,du.$$

b. Prouver que, pour tout entier $p \geqslant 0$, $|\alpha_p| \leqslant \frac{N_\infty(\varphi_a)}{a^p}$.

c. En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \alpha_p h^p$ de la variable réelle h est supérieur ou égal à a.

Dans la suite, on note S_a la fonction définie sur $]-a, a[$ par : $S_a(h) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \alpha_p h^p$.

2. *Développement en série entière de $h \longmapsto \hat{f}(a+h)$.*

a. Démontrer que, pour tout élément h de $]-a, a[$, pour tout entier $n \geqslant 0$, et pour tout $u \geqslant 0$,

$$\frac{1}{u+a+h} = \frac{1}{u+a} - \frac{h}{(u+a)^2} + \ldots + \frac{(-1)^n h^n}{(u+a)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1} h^{n+1}}{(u+a)^{n+1}(u+a+h)}.$$

b. Soit w_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $w_n(u) = \frac{1}{(u+a)^n(u+a+h)}$.

Établir que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{(u+a)^{n+1}(u+a+h)}\,du = -\int_0^{+\infty} \varphi_a(u)\, w_n'(u)\,du ;$$

on justifiera la convergence de ces intégrales.

En déduire que :

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{(u+a)^{n+1}(u+a+h)}\,du\right| \leqslant \frac{N_\infty(\varphi_a)}{a^n(a+h)}.$$

c. Prouver que, pour tout élément h de $]-a, a[$,

(5) $$\hat{f}(a+h) = S_a(h).$$

3. *Dérivabilité de $\hat{f}$.*

Prouver que la fonction $\hat{f}$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, et, pour tout élément a de $]0, +\infty[$ et pour tout entier $p \geqslant 0$, exprimer $D^p\hat{f}(a)$ à l'aide de α_p.

(On pourra utiliser la relation (5).)

Tournez la page S.V.P.

III. ÉTUDE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

On note F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(]0, +\infty[)$ constitué des fonctions f telles que, pour tout nombre réel $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xu} f(u)\,du$ soit convergente. La fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xu} f(u)\,du \tag{6}$$

est appelée transformée de Laplace de f.

On note D le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(]0, +\infty[)$ constitué des fonctions f telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(u)\,du$ soit convergente. Étant donné un élément f de D, pour tout élément t de $[0, +\infty[$, on pose :

$$\varphi(t) = \int_0^t f(u)\,du \qquad \text{et} \qquad \psi(t) = \int_t^{+\infty} f(u)\,du.$$

1. *Transformée de Laplace d'un élément de D.*

Soit f un élément de D.

a. Prouver que, pour tout élément x de $]0, +\infty[$ et tout élément b de $]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^b e^{-xu} \varphi(u)\,du$ est absolument convergente, et que :

$$\left| \int_0^b e^{-xu} \varphi(u)\,du \right| \leqslant \frac{1}{x} \cdot \sup_{0 \leqslant u \leqslant b} |\varphi(u)|.$$

En déduire que, pour tout $x \geqslant 0$, l'intégrale $\int_0^b e^{-xu} f(u)\,du$ est convergente et que :

$$\left| \int_0^b e^{-xu} f(u)\,du \right| \leqslant 2 \sup_{0 \leqslant u \leqslant b} |\varphi(u)|. \tag{7}$$

b. Prouver de même que, pour tout élément x de $]0, +\infty[$ et tout élément c de $]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_c^{+\infty} e^{-xu} \psi(u)\,du$ est absolument convergente, et que :

$$\left| \int_c^{+\infty} e^{-xu} \psi(u)\,du \right| \leqslant \frac{1}{x} \sup_{u \geqslant c} |\psi(u)|.$$

En déduire que, pour tout $x \geqslant 0$, l'intégrale $\int_c^{+\infty} e^{-xu} f(u)\,du$ est convergente et que :

$$\left| \int_c^{+\infty} e^{-xu} f(u)\,du \right| \leqslant 2 \sup_{u \geqslant c} |\psi(u)|. \tag{8}$$

c. En déduire que f appartient à F.

d. Pour tout $x \geqslant 0$, on pose $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xu} f(u)\,du$.

Prouver que, pour tout $x > 0$,

$$g(x) = x \int_0^{+\infty} e^{-xu} \varphi(u)\,du = \int_0^{+\infty} f(u)\,du - x \int_0^{+\infty} e^{-xu} \psi(u)\,du. \tag{9}$$

Tournez la page S.V.P.

2. *Continuité de la transformée de Laplace d'un élément de D.*

Soit f un élément de D. Pour tout $x \geqslant 0$ et tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$g_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-xu} f(u)\,du. \tag{10}$$

a. À l'aide de (7) et (8), prouver que (g_n) converge vers g uniformément sur $[0, +\infty[$.

b. Établir la continuité de g sur $[0, +\infty[$.

3. *Continuité de la transformée de Laplace d'un élément de F.*

Soient f un élément de F et g sa transformée de Laplace, définie sur $]0, +\infty[$ par (6). On définit g_n sur $]0, +\infty[$ par (10). Soit enfin a un élément de $]0, +\infty[$.

a. Prouver que la fonction f_a définie sur $]0, +\infty[$ par $f_a(u) = e^{-au} f(u)$ appartient à D et que, pour tout $x \geqslant a$, $g(x) = g_a(x - a)$, où g_a désigne la transformée de Laplace de f_a, définie sur $[0, +\infty[$.

b. En déduire que, pour tout $a > 0$, g_n converge vers g uniformément sur $[a, +\infty[$.

c. Établir la continuité de g sur $]0, +\infty[$.

Dans toute la suite on note $\mathscr{L}$ l'application linéaire de F dans $\mathscr{C}(]0, +\infty[)$ qui à f associe g. On admettra que $\mathscr{L}$ est injective.

IV. EXPRESSION DE $\hat{f}$ À L'AIDE DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Soit f un élément de E.

1. *Transformée de Laplace de f.*

a. Prouver que, pour tout $x > 0$, les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-xu} \varphi_1(u)\,du$ et $\int_0^{+\infty} ue^{-xu} \varphi_1(u)\,du$,

où φ_1 est la fonction définie par (2), sont absolument convergentes.

b. En déduire que f appartient à F et que, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xu} f(u)\,du = \int_0^{+\infty} [x(u+1) - 1]\, e^{-xu} \varphi_1(u)\,du$$

(on effectuera une intégration par parties).

On définit alors la transformée de Laplace $g = \mathscr{L} f$ par (6) et la suite (g_n) par (10), ces fonctions étant définies sur $]0, +\infty[$.

2. *Transformée de Laplace de g.*

Soit s un élément donné de $]0, +\infty[$.

a. Soient a et b des éléments de $]0, +\infty[$ tels que $a < b$ et n un entier strictement positif.

Établir que :

$$\int_a^b e^{-sx} g_n(x)\,dx = e^{-sa} \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-au} \frac{f(u)}{u+s}\,du - e^{-sb} \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-bu} \frac{f(u)}{u+s}\,du.$$

Pour cela, on introduira la fonction h définie sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par :

$$h(x, u) = e^{-x(u+s)} f(u)$$

et on considérera l'intégrale double $\iint_R h(x, u)\,dx\,du$ sur le rectangle $R = [a, b] \times \left[\frac{1}{n}, n\right]$.

Tournez la page S.V.P.

b. En observant que la fonction $u \longmapsto \dfrac{f(u)}{u+s}$ appartient à D et à l'aide des résultats établis au III, en déduire que, a et b étant fixés,

$$\int_a^b e^{-sx} g(x)\,dx = e^{-sa}\int_0^{+\infty} e^{-au}\frac{f(u)}{u+s}\,du - e^{-sb}\int_0^{+\infty} e^{-bu}\frac{f(u)}{u+s}\,du,$$

puis que :

$$\int_a^b e^{-sx} g(x)\,dx = e^{-sa}\hat{f}(s) - e^{-sa}a\int_0^{+\infty} e^{-au}\psi_s(u)\,du - e^{-sb}b\int_0^{+\infty} e^{-bu}\varphi_s(u)\,du.$$

c. Prouver que, pour tout $b > 0$,

$$\left| b\int_0^{+\infty} e^{-bu}\varphi_s(u)\,du \right| \leqslant N_\infty(\varphi_s).$$

d. Prouver que, pour tout $a > 0$ et tout $c > 0$,

$$\left| a\int_0^{+\infty} e^{-au}\psi_s(u)\,du \right| \leqslant (1 - e^{-ac})\,N_\infty(\psi_s) + \sup_{u \geqslant c} |\psi_s(u)|.$$

e. Établir finalement que $g = \mathscr{L}f$ appartient à F, et que, pour tout $s > 0$,

$$(11) \qquad \mathscr{L}g(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u+s}\,ds = \hat{f}(s).$$

3. *Applications.*

a. Soit $\mathscr{S}$ l'application linéaire de E dans $\mathscr{C}(]0, +\infty[)$ qui à f associe $\hat{f}$. Prouver que $\mathscr{S}$ est injective.

b. Soient α un élément de $]0, 1[$, et f_α la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f_\alpha(u) = u^{\alpha-1}$.

Calculer $g_\alpha = \mathscr{L}(f_\alpha)$ et $\mathscr{L}(g_\alpha)$. On posera, pour tout $\beta > 0$, $\Gamma(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\beta-1}\,du$.

En déduire que :

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\,du.$$

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail